

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный технический университет
им. Р.Е. Алексеева»
АРЗАМАССКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)

УТВЕРЖДАЮ:

Директор института:

_____ Глебов В.В.
« 22 » июня 2021 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.12 Стохастические дифференциальные системы

(индекс и наименование дисциплины по учебному плану)

для подготовки бакалавров

Направление подготовки 01.03.04 Прикладная математика

(код и направление подготовки)

Направленность Математическое и программное обеспечение систем обработки информации

(наименование профиля, программы магистратуры)

и управления

Форма обучения очная

(очная, очно-заочная, заочная)

Год начала подготовки 2021

Объем дисциплины 144/4

(часов/з.е)

Промежуточная аттестация экзамен

(экзамен, зачет с оценкой, зачет)

Выпускающая кафедра Прикладная математика

(наименование кафедры)

Кафедра-разработчик Прикладная математика

(наименование кафедры)

Разработчик(и): Зюзина Наиля Юрьевна

(ФИО, ученая степень, ученое звание)

г. Арзамас
2021 г.

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО 3++) по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика, утвержденного приказом Минобрнауки России от 10 января 2018 № 11 на основании учебного плана, принятого Ученым советом АПИ НГТУ, протокол от 09.06.2021 г. № 4

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры-разработчика, протокол от 22.06.2021 № 5/1

Заведующий кафедрой _____ Пакшин П.В.
(подпись) (ФИО)

Рабочая программа рекомендована к утверждению УМК АПИ НГТУ,
протокол от 22.06.2021 г. № 15

Зам. директора по УР _____ Шурыгин А.Ю.
(подпись)

Рабочая программа зарегистрирована в учебном отделе № 01.03.04 - 44

Начальник УО _____ Мельникова О.Ю.
(подпись)

Заведующая отделом библиотеки _____ Старостина О.Н.
(подпись)

Оглавление

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	4
1.1. Цель освоения дисциплины (модуля)	4
1.2. Задачи освоения дисциплины (модуля)	4
2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ	4
3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	5
4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	6
4.1 Распределение трудоемкости дисциплины по видам работ по семестрам	6
4.2 Содержание дисциплины, структурированное по разделам, темам	7
5. ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	8
5.1. Описание показателей и критериев контроля успеваемости, описание шкал оценивания	8
5.2. Оценочные средства для контроля освоения дисциплины	12
5.2.1 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности в ходе текущего контроля успеваемости	12
5.2.2 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта в ходе промежуточной аттестации по дисциплине	14
5.3. Процедура оценивания результатов обучения по дисциплине	15
6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ	17
6.1 Основная литература	17
6.2 Дополнительная литература	17
6.3 Методические указания, рекомендации и другие материалы к занятиям	17
7. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ	17
7.1 Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля), включая электронные библиотечные и информационно-справочные системы	17
7.2 Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства необходимого для освоения дисциплины	17
8. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ РЕСУРСЫ ДЛЯ ИНВАЛИДОВ И ЛИЦ С ОВЗ	17
9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ, НЕОБХОДИМОЕ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)	18
10. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ОБУЧАЮЩИМСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	19
10.1 Общие методические рекомендации для студентов по освоению дисциплины, образовательные технологии	19
10.2 Методические указания для занятий лекционного типа	19
10.3. Методические указания по освоению дисциплины на лабораторных работах	19
10.4 Методические указания по освоению дисциплины на занятиях практического типа	20
10.5 Методические указания по самостоятельной работе студентов	20
10.6 Методические указания по обеспечению образовательного процесса	20

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

1.1. Цель освоения дисциплины (модуля)

Целью освоения дисциплины «Стохастические дифференциальные системы» является подготовка студентов к выполнению профессиональных задач в рамках трудовой деятельности по профессиональному стандарту 40.011 «Проведение научно-исследовательских и опытно-конструкторских разработок» в рамках обобщенной трудовой функции «Проведение научно-исследовательских и опытно-конструкторских разработок по отдельным разделам темы» и изучение стохастических дифференциальных систем, а также применение этих знаний при решении задач в научно-исследовательском и производственно-технологическом процессах.

1.2. Задачи освоения дисциплины (модуля)

- сбор и обработка статистических материалов, необходимых для расчетов и конкретных практических выводов;
- математическое моделирование процессов и объектов на базе стандартных пакетов автоматизированного проектирования и исследований;
- анализ и выработка решений в конкретных предметных областях;
- отладка наукоемкого программного обеспечения;
- проведение экспериментов по заданной методике, составление описания проводимых исследований и анализ результатов;
- составление отчета по выполненному заданию;
- участие во внедрении результатов исследований и разработок;
- разработка и расчет вариантов решения проблемы, анализ этих вариантов;
- расчет экономической эффективности.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «Стохастические дифференциальные системы» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений ОП ВО.

Дисциплина базируется на следующих дисциплинах:

- Математический анализ
- Линейная алгебра и аналитическая геометрия
- Дифференциальные уравнения
- Дискретная математика
- Теория функций комплексного переменного
- Теория вероятностей, математическая статистика и теория случайных процессов
- Математическое моделирование
- Основы функционального анализа
- Матричные уравнения и неравенства
- Уравнения математической физики
- Теория управления

Результаты обучения, полученные при освоении дисциплины, необходимы при выполнении выпускной квалификационной работы.

Рабочая программа дисциплины «Стохастические дифференциальные системы» для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья разрабатывается индивидуально с учетом особенностей психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья таких обучающихся.

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Процесс изучения дисциплины «Стохастические дифференциальные системы» направлен на формирование элементов профессиональной компетенции ПКС-1 в соответствии с ОП ВО по направлению подготовки 01.03.04 «Прикладная математика».

Таблица 3.1 – Формирование компетенций дисциплинами

Код компетенции / наименование дисциплин, формирующих компетенцию совместно	Семестры формирования дисциплины							
	Компетенции берутся из УП по направлению подготовки бакалавра							
	1	2	3	4	5	6	7	8
ПКС-1								
Ознакомительная практика		✓						
Вариационное исчисление					✓			
Матричные уравнения и неравенства						✓		
Научно-исследовательская работа						✓		
Вычислительная математика						✓		
Основы функционального анализа						✓		
Теоретические основы инерциальной навигации							✓	
Стохастические дифференциальные системы								✓
Теория навигационных систем								✓
Преддипломная практика								✓
Выполнение и защита ВКР								✓

Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине «Стохастические дифференциальные системы», соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОП, представлен в табл. 3.2.

Таблица 3.2 – Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОП

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине		
ПКС-1 Способен формулировать задачу профессиональной деятельности, формализовав ее на основе знаний математического аппарата и естественнонаучных дисциплин	ИПКС-1.1. Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и естественных наук.	Знать: основные виды стохастических дифференциальных уравнений (Ланжевена, Ито и Стратоновича);	Уметь: вычислять аналитически простейшие стохастические интегралы Ито	Владеть: навыками решения простейших стохастических дифференциальных уравнений
	ИПКС-1.2. Формулирует задачи на основе знаний профильных разделов математических и естественнонаучных дисциплин.	Знать: понятие и основные свойства стохастического интеграла Ито; понятие о процессах Ито; понятие о диффузионном процессе Ито и его производящем дифференциальном операторе;	Уметь: применять формулу Ито для аналитического решения простейших СДУ	Владеть: методами численного моделирования стохастических дифференциальных уравнений

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

4.1 Распределение трудоемкости дисциплины по видам работ по семестрам

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зач. ед. или 144 часа, распределение часов по видам работ по семестрам представлено в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Распределение трудоемкости дисциплины по видам работ по семестрам для студентов очной формы обучения

Вид учебной работы	Трудоемкость в час	
	Всего час.	В т.ч. по семестрам
Формат изучения дисциплины	с использованием элементов электронного обучения	
Общая трудоемкость дисциплины по учебному плану	144	144
1. Контактная работа:	64	64
1.1. Аудиторная работа, в том числе:	58	58
занятия лекционного типа (Л)	20	20
занятия семинарского типа (ПЗ – семинары, практические занятия и др.)	6	6
лабораторные работы (ЛР)	32	32
1.2. Внеаудиторная, в том числе	6	6
курсовая работа (проект) (КР/КП) (консультация, защита)		
текущий контроль, консультации по дисциплине	4	4
контактная работа на промежуточном контроле (КРА)	2	2
2. Самостоятельная работа (СРС)	80	80
реферат/эссе (подготовка)		
расчётно-графическая работа (РГР) (подготовка)		
контрольная работа		
курсовая работа/проект (КР/КП) (подготовка)		
самостоятельное изучение разделов, самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий, подготовка к лабораторным и практическим занятиям, коллоквиум и т.д.)	44	44
Подготовка к экзамену (контроль)*	36	36
Подготовка к зачету / зачету с оценкой (контроль)		

4.2 Содержание дисциплины, структурированное по разделам, темам

Таблица 4.2 – Содержание дисциплины, структурированное по темам, для студентов очной формы обучения

Планируемые (контролируемые) результаты освоения: код УК; ОПК; ПК и индикаторы достижения компетенций	Наименование разделов, тем	Виды учебной работы (час)				Вид СРС
		Контактная работа			Самостоятельная работа студентов	
		Лекции	Лабораторные работы	Практические занятия		
1	2	3	4	5	6	7
8 семестр						
ПКС-1 ИПКС-1.1 ИПКС-1.2	Раздел 1. Введение и предварительные сведения из теории вероятностей					
	Тема 1.1 Стохастические аналоги обыкновенных дифференциальных уравнений. Задачи, приводящие к математическим моделям в виде СДУ (фильтрация, стохастическое управление, финансовая математика и др.)	6			3	Подготовка к лекциям [6.1.1], [6.1.2], [6.1.3], [6.1.4], [6.2.1]
	Тема 1.2 Вероятностное пространство. Случайные переменные. Независимость. Стохастический процесс. Теорема Колмогорова о построении стохастического процесса по конечномерным распределениям					
	Тема 1.3 Построение процесса броуновского движения (винеровского процесса) на основе теоремы Колмогорова. Свойства винеровского процесса. Теорема непрерывности Колмогорова. Версии стохастических процессов. Существование непрерывной версии винеровского процесса					
	Практическая работа №1. Вероятностное пространство. Случайные переменные. Практическая работа №2. Стохастические процессы. Построение стохастических процессов.			6	3	Подготовка к практическим занятиям [6.1.1], [6.1.2], [6.1.3], [6.1.4], [6.2.1]
	Итого по 1 разделу	6		6	6	
	Раздел 2. Интеграл Ито					
	Тема 2.1 Уравнение Ланжевена и его математическая Интерпретация	6			3	Подготовка к лекциям [6.1.1], [6.1.2], [6.1.3], [6.1.4], [6.2.1]
	Тема 2.2 Построение интеграла Ито. Свойство изометрии и другие свойства интеграла Ито					
	Тема 2.3 Мартингалы. Непрерывная версия стохастического интеграла. Интеграл Ито как мартингал					
	Тема 2.4 Обобщения интеграла Ито. Сравнение интегралов Ито и Стратоновича					
	Лабораторная работа №1. Построение интеграла ИТО Лабораторная работа №2. Сравнение интегралов Ито и Стратоновича.		8		4	Подготовка к лабораторным занятиям [6.1.1]
Итого по 2 разделу	6	8		7		
Раздел 3. Процессы Ито и формула Ито						
Тема 3.1 Определение процесса Ито. Формула Ито для скалярных процессов. Формула Ито для векторных процессов	4			3	Подготовка к лекциям [6.1.1],[6.1.2],[6.1.3], [6.1.4],[6.2.1],	
Тема 3.2 Теорема о представлении мартингала						
Лабораторная работа №3. Процессы Ито. Лабораторная работа №4. Мартингал.		8		4	Подготовка к лабораторным занятиям [6.1.1]	
Итого по 3 разделу	4	8		7		

1	2	3	4	5	6	7
	Раздел 4. Стохастические дифференциальные уравнения и методы их решения					
	Тема 4.1 Теорема существования и единственности решения СДУ Ито. Слабые и сильные решения СДУ. Некоторые приемы нахождения решения конкретных стохастических дифференциальных уравнений Ито. Численное моделирование винеровского процесса Тема 4.2 Решение СДУ методами Эйлера и Рунге – Кутты. Слабые и сильные аппроксимации. Схемы Тейлора различных порядков. Схема Мильштейна. Численная устойчивость и точность методов	4			8	Подготовка к лекциям [6.1.1], [6.1.2], [6.1.3], [6.1.4], [6.2.1]
	Лабораторная работа №5. Решение стохастических уравнений Ито Лабораторная работа №6. Решение СДУ методами Эйлера и Рунге – Кутты. Лабораторная работа №7. Решение задач стохастических систем в среде SCILAB. Построение стохастических процессов Лабораторная работа №8. Решение задач стохастических систем в среде SCILAB. Решение СДУ.		16		16	Подготовка к лабораторным занятиям [6.1.1], [6.3.1]
	Итого по 4 разделу	4	16		24	
	Итого по дисциплине	20	32	6	44	

Используемые активные и интерактивные технологии приведены в таблице 4.3.

Таблица 4.3 - Используемые активные и интерактивные образовательные технологии

Вид занятий	Наименование используемых активных и интерактивных образовательных технологий
Лекции	Технология развития критического мышления Дискуссионные технологии
Практические занятия, лабораторные работы	Технология развития критического мышления Дискуссионные технологии Тестовые технологии Технологии работы в малых группах Технология коллективной работы Информационно-коммуникационные технологии

5. ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

5.1. Описание показателей и критериев контроля успеваемости, описание шкал оценивания

Критерии оценивания результатов обучения и процедуры оценивания компетенций, формируемых в рамках данной дисциплины, приводятся в табл. 5.4.

Оценочные процедуры в рамках текущего контроля проводятся преподавателем дисциплины. На лекциях оценивается активность участия в дискуссионных обсуждениях. Практические и лабораторные занятия проводятся в форме выполнения индивидуальных заданий. При выполнении индивидуального практического и лабораторного задания преподавателем оценивается качество выполненного задания, срок его выполнения, качество и срок оформления отчета, ответы на вопросы преподавателя.

Самостоятельная работа включает выполнение самостоятельных заданий в форме отчетов по практическим и лабораторным работам.

Тестирование проводится с использованием СДО MOODLE в рамках самостоятельной работы.

Тест содержит 10 тестовых вопросов (оценивание 70% показателей, время на проведение тестирования 20 минут).

Описание показателей и критериев контроля успеваемости, описание шкал оценивания на этапе текущей аттестации представлены в табл. 5.1.

Промежуточная аттестация проводится в форме экзамена.

Описание показателей и критериев контроля успеваемости, описание шкал оценивания на этапе промежуточной аттестации представлены в табл. 5.2.

Таблица 5.1 – Описание показателей и критериев контроля успеваемости, описание шкал оценивания на этапе текущей аттестации

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора компетенции	Показатели контроля успеваемости	Критерии и шкала оценивания		Форма контроля
			0 баллов	1 баллов	
ПКС-1 Способен формулировать задачу профессиональной деятельности, формализовав ее на основе знаний математического аппарата и естественнонаучных дисциплин	ИПКС-1.1. Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и естественных наук.	Знать: основные виды стохастических дифференциальных уравнений и систем	Теоретический материал не изучен или изучен частично. Верно выполнено менее 70% вопросов каждого теста.	Теоретический материал изучен. Верно выполнено 70% и более вопросов каждого теста.	Устное собеседование по вопросам Участие в групповых обсуждениях Тестирование по разделам дисциплины в СДО MOODLE
		Уметь: вычислять аналитически простейшие стохастические интегралы Ито	Лабораторные и практические задания не выполнены или выполнены частично.	Лабораторные и практические задания выполнены полностью.	Контроль выполнения лабораторных и практических заданий (см. табл. 4.2)
		Владеть: аппаратом вычисления простейшие стохастические интегралы Ито	Лабораторные и практические задания выполнены некачественно и/или не в срок.	Лабораторные и практические задания выполнены качественно и в срок.	Контроль выполнения лабораторных и практических заданий (см. табл. 4.2)
	ИПКС-1.2. Формулирует задачи на основе знаний профильных разделов математических и естественнонаучных дисциплин.	Знать: понятие и основные свойства стохастического интеграла Ито; понятие о процессах Ито; понятие о диффузионном процессе Ито и его производящем дифференциальном операторе	Теоретический материал не изучен или изучен частично. Верно выполнено менее 70% вопросов каждого теста.	Теоретический материал не изучен или изучен частично. Верно выполнено менее 70% вопросов каждого теста.	Устное собеседование по вопросам Участие в групповых обсуждениях Тестирование по разделам дисциплины в СДО MOODLE
		Уметь: применять формулу Ито для аналитического решения простейших СДУ	Лабораторные и практические задания не выполнены или выполнены частично.	Лабораторные и практические задания выполнены полностью.	Контроль выполнения лабораторных и практических заданий (см. табл. 4.2)
		Владеть: аппаратом вычисления стохастические дифференциальных уравнений и применения их для описания и решения практических задач	Лабораторные и практические задания выполнены некачественно и/или не в срок.	Лабораторные и практические задания выполнены качественно и в срок.	Контроль выполнения лабораторных и практических заданий (см. табл. 4.2)

Таблица 5.2 – Описание показателей и критериев контроля успеваемости, описание шкал оценивания на этапе промежуточной аттестации (экзамен)

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора компетенции	Показатели контроля успеваемости	Критерии и шкала оценивания			Форма контроля
			0 баллов	1 балл	2 балла	
ПКС-1 Способен формулировать задачу профессиональной деятельности, формализовав ее на основе знаний математического аппарата и естественнонаучных дисциплин	ИПКС-1.1. Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и естественных наук.	Знать: основные виды стохастических дифференциальных уравнений и систем	Ответ на вопрос отсутствует	Представлен не полный ответ на вопрос	Представлен развернутый ответ на вопрос	Ответ на теоретический вопрос билета
			Ответ на вопрос отсутствует	Представлен не полный ответ на вопрос	Представлен развернутый ответ на вопрос	Ответы на дополнительные вопросы
	Уметь: вычислять аналитически простейшие стохастические интегралы Ито Владеть: аппаратом вычисления простейшие стохастические интегралы Ито	Задание не решено	Задание решено с ошибками	Задание решено верно	Решение задач билета	
	ИПКС-1.2. Формулирует задачи на основе знаний профильных разделов математических и естественнонаучных дисциплин.	Знать: понятие и основные свойства стохастического интеграла Ито; понятие о процессах Ито; понятие о диффузионном процессе Ито и его производящем дифференциальном операторе	Ответ на вопрос отсутствует	Представлен не полный ответ на вопрос	Представлен развернутый ответ на вопрос	Ответ на теоретический вопрос билета
			Ответ на вопрос отсутствует	Представлен не полный ответ на вопрос	Представлен развернутый ответ на вопрос	Ответы на дополнительные вопросы
		Уметь: применять формулу Ито для аналитического решения простейших СДУ Владеть: аппаратом вычисления стохастические дифференциальных уравнений и применения их для описания и решения практических задач	Задание не решено	Задание решено с ошибками	Задание решено верно	Решение задач билета

Таблица 5.3 – Соответствие набранных баллов и оценки за промежуточную аттестацию

Баллы за текущую успеваемость*	Баллы за промежуточную аттестацию		Оценка
	Суммарное количество баллов**	Баллы за решение задач**	
0	0-1	0-1	«неудовлетворительно»
1	1	1	«удовлетворительно»
1	1-2	1-2	«хорошо»
1	2	2	«отлично»

*) количество баллов рассчитывается в соответствии с таблицей 5.1.

**) количество баллов рассчитывается в соответствии с таблицей 5.2.

5.2. Оценочные средства для контроля освоения дисциплины

5.2.1 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности в ходе текущего контроля успеваемости

Для текущего контроля знаний и умений студентов по дисциплине проводится комплексная оценка, включающая:

выполнение практических заданий, оформление отчетов по практическим занятиям;
 выполнение лабораторных заданий, оформление отчетов по практическим занятиям;
 тестирование в СДО MOODLE по различным разделам дисциплины.

Типовые задания к практическим занятиям

Практическая работа №1. Вероятностное пространство. Случайные переменные.

Задание:

1. Повторить теорию темы 1.2

Контрольные вопросы:

1. Вероятностное пространство.
2. Случайные переменные.
3. Конечномерные распределения.

2. Решить примеры:

2.2. Пусть $X: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ – случайная величина. Функция распределения F величины X определяется формулой

$$F(x) = P[X \leq x].$$

а) Докажите, что F обладает следующими свойствами:

- (i) $0 \leq F \leq 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$;
- (ii) F является возрастающей (точнее, неубывающей);
- (iii) F непрерывна справа, т. е. $F(x) = \lim_{h > 0} F(x + h)$.

с) Пусть $p(x) \geq 0$ — измеримая функция на \mathbf{R} . Говорят, что величина X имеет плотность p , если

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(y) dy \quad \text{для всех } x.$$

Таким образом, из соотношений (2.2.1)–(2.2.2) получаем, что одномерное броуновское движение B_t в момент времени t при $B_0 = 0$ имеет плотность

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Найдите плотность величины B_t^2 .

2.5. Пусть $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ — две независимые случайные величины. Предположим для простоты, что X и Y ограничены. Докажите, что

$$E[XY] = E[X]E[Y].$$

(Указание. Предположим, что $|X| \leq M, |Y| \leq N$. Аппроксимируйте X и Y простыми функциями $\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{F_i}(\omega)$, $\psi(\omega) = \sum_{j=1}^n b_j \chi_{G_j}(\omega)$ соответственно, где $F_i = X^{-1}([a_i, a_{i+1}))$, $G_j = Y^{-1}([b_j, b_{j+1}))$, $-M = a_0 < a_1 < \dots < a_m = M$, $-N = b_0 < b_1 < \dots < b_n = N$. Тогда

$$E[X] \approx E[\varphi] = \sum_i a_i P(F_i), \quad E[Y] \approx E[\psi] = \sum_j b_j P(G_j)$$

и

$$E[XY] \approx E[\varphi\psi] = \sum_{i,j} a_i b_j P(F_i \cap G_j) \dots$$

Типовые задания для лабораторных работ

Лабораторная работа №7. Решение задач стохастических систем в среде SCILAB.

Задание: В среде SCILAB сгенерировать и построить линейно интерполированную примерную траекторию аппроксимаций многократных интегралов Стратоновича $J_{(1),t}^p, J_{(0,1),t}^p, J_{(1,0),t}^p, J_{(1,1),t}^p, J_{(0,1,1),t}^p, J_{(1,0,1),t}^p, J_{(1,1,0),t}^p$ на интервале $0 \leq t \leq 1$ для $p=5$, используя 2^9 подынтервалов равной длины. Повторить для $p=50, 100$.

Типовые тестовые задания

1. Процедура, позволяющая оценить состояние системы, удовлетворяющей «зашумленному» линейному дифференциальному уравнению, на основе использования ряда «зашумленных» наблюдений, называется....

2. Стохастическое дифференциальное уравнение - уравнение со начальными или краевыми условиями, со случайным воздействием или случайными параметрами.

3. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — заданное векторное пространство и если для функции $Y: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ определена $Y^1(U) := \{\omega \in \Omega(\omega); Y(\omega) \in U\} \in \mathcal{F}$ для всех открытых множеств $U \in \mathbf{R}^n$, тогда функция Y называется \mathcal{F} -

4. Два подмножества $A, B \in \mathcal{F}$ называются независимыми, если $P(AB) = \dots$

5. Если процесс X_t есть версия процесса Y_t , то X_t и Y_t имеют конечномерные распределения.
6. Если B_t - гауссовский процесс, то для $t \geq s$ $E[(B_t - B_s)^2] = \dots\dots\dots$.
7. Если B_t - броуновское движение и $s = t_0 \geq 0$, то процесс $B_t - B_{t+s} - B_s$, $t \geq 0$ является
8. Выберите правильное утверждение:
 А) интеграл Ито является мартингалом;
 В) интеграл Стратоновича является мартингалом.
 1) только А – верно
 2) только В – верно
 3) оба верно
 4) оба не верны.
9. Для интеграла $\int_0^t B_s dB_s$ выражение $\int_0^t B_s dB_s - \frac{1}{2} B_t^2$ равно
10. Если B_t - броуновское движение и $s = t_0 \geq 0$, то $(dB_t)^2$ равно

5.2.2 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта в ходе промежуточной аттестации по дисциплине

Для текущего контроля знаний и умений студентов по дисциплине проводится комплексная оценка, включающая:

- выполнение практических заданий, оформление отчетов по практическим занятиям;
- выполнение индивидуальных заданий контрольной работы
- тестирование в СДО MOODLE по различным разделам дисциплины.

Перечень вопросов и заданий для подготовки к экзамену (ИПКС-1.1, ИПКС-1.2.):

1. Стохастические аналоги обыкновенных дифференциальных уравнений
2. Задачи, приводящие к математическим моделям в виде СДУ (фильтрация, стохастическое управление, финансовая математика и др.)
3. Вероятностное пространство. Случайные переменные.
4. Независимость. Стохастический процесс
5. Теорема Колмогорова о построении стохастического процесса по конечномерным распределениям
6. Построение процесса броуновского движения (винеровского процесса) на основе теоремы Колмогорова
7. Свойства винеровского процесса
8. Теорема непрерывности Колмогорова
9. Версии стохастических процессов
10. Существование непрерывной версии винеровского процесса
11. Уравнение Ланжевена и его математическая интерпретация
12. Построение интеграла Ито
13. Свойство изометрии и другие свойства интеграла Ито
14. Мартингалы. Непрерывная версия стохастического интеграла
15. Интеграл Ито как мартингал
16. Обобщения интеграла Ито
17. Сравнение интегралов Ито и Стратоновича
18. Определение процесса Ито.
19. Формула Ито для скалярных процессов

20. Формула Ито для векторных процессов
21. Теорема о представлении мартингала
22. Теорема существования и единственности решения СДУ Ито
23. Слабые и сильные решения СДУ
24. Некоторые приемы нахождения решения конкретных стохастических дифференциальных уравнений Ито
25. Численное моделирование винеровского процесса
26. Решение СДУ методами Эйлера и Рунге – Кутты
27. Слабые и сильные аппроксимации
28. Схемы Тейлора различных порядков
29. Схема Мильштейна
30. Численная устойчивость и точность методов

Примеры экзаменационных задач

1. Найти $M[B_t^6]$ при условии $B_0 = 0$.
2. Является ли мартингалом процесс $X_t = B_t^3 - 3tB_t$,
3. Какому дифференциальному уравнению Ито соответствует уравнение Стратоновича $dX_t = \sin X_t \cos X_t dt + (t^2 + \cos X_t) \circ dB_t$,
4. Найти решение уравнения Ито

$$dX_t = (c + \frac{1}{2}\alpha^2)X_t dt + \alpha X_t dB_t$$

5. Решить систему уравнений Ито

$$dX_1 = -\frac{1}{2}X_1 dt - \frac{a}{b}X_2 dB_t$$

$$dX_2 = -\frac{1}{2}X_2 dt + \frac{b}{a}X_1 dB_t$$

$$a, b > 0.$$

6. Найти производящий дифференциальный оператор процесса Ито $dX_t = rX_t dt + \alpha X_t dB_t$,
7. Найти производящий дифференциальный оператор процесса Ито

$$dX_1 = -\frac{1}{2}X_1 dt - X_2 dB_t$$

$$dX_2 = -\frac{1}{2}X_2 dt + X_1 dB_t$$

5.3. Процедура оценивания результатов обучения по дисциплине

Процедура оценивания формируемых в рамках дисциплины компетенций (элементов компетенций) состоит из следующих этапов:

1. Текущий контроль (описание показателей и критериев контроля успеваемости, описание шкал оценивания на этапе текущей аттестации представлены в табл. 5.1, задания в п. 5.2.1).
2. Промежуточная аттестация (описание показателей и критериев контроля успеваемости, описание шкал оценивания на этапе промежуточной аттестации представлены в табл. 5.2, задания в п. 5.2.2).

Для всего перечня формируемых компетенций (элементов компетенций) дисциплины приводится процедура оценки результатов обучения (табл. 5.4).

Таблицы 5.4 – Процедура, критерии и методы оценивания результатов обучения

Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов				Методы оценивания
	1 критерий – отсутствие усвоения «неудовлетворительно»	2 критерий – не полное усвоение «удовлетворительно»	3 критерий – хорошее усвоение «хорошо»	4 критерий – отличное усвоение «отлично»	
ПКС-1 ИПКС-1.1					
Знать: основные виды стохастических дифференциальных уравнений и систем	Отсутствие усвоения знаний	Недостаточно уверенно понимает и может объяснять полученные знания	На достаточно высоком уровне понимает и может объяснять полученные знания	Отлично понимает и может объяснять полученные знания, демонстрирует самостоятельную познавательную деятельность	Участие в обсуждении дискуссионных материалов на лекциях Тестирование Промежуточная аттестация
Уметь: вычислять аналитически простейшие стохастические интегралы Ито	Не демонстрирует умения	Не уверенно демонстрирует умения	Достаточно уверенно демонстрирует умения	Отлично демонстрирует умения	Выполнение ПЗ и ЛР
Владеть: аппаратом вычисления простейшие стохастические интегралы Ито	Не демонстрирует навыки	Не уверенно демонстрирует навыки	Достаточно уверенно демонстрирует навыки	Отлично демонстрирует самостоятельные навыки	Выполнение ПЗ и ЛР
ПКС-1 ИПКС-1.2					
Знать: понятие и основные свойства стохастического интеграла Ито; понятие о процессах Ито; понятие о диффузионном процессе Ито и его производящем дифференциальном операторе	Отсутствие усвоения знаний	Недостаточно уверенно понимает и может объяснять полученные знания	На достаточно высоком уровне понимает и может объяснять полученные знания	Отлично понимает и может объяснять полученные знания, демонстрирует самостоятельную познавательную деятельность	Участие в обсуждении дискуссионных материалов на лекциях Тестирование Промежуточная аттестация
Уметь: применять формулу Ито для аналитического решения простейших СДУ	Не демонстрирует умения	Не уверенно демонстрирует умения	Достаточно уверенно демонстрирует умения	Отлично демонстрирует умения	Выполнение ПЗ и ЛР
Владеть: аппаратом вычисления стохастические дифференциальных уравнений и применения их для описания и решения практических задач	Не демонстрирует навыки	Не уверенно демонстрирует навыки	Достаточно уверенно демонстрирует навыки	Отлично демонстрирует самостоятельные навыки	Выполнение ПЗ и ЛР

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1 Основная литература

6.1.1 Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения [Текст] / Б. Оксендаль; пер. с англ. - М.: Мир, 2003. - 408 с.

6.1.2 Розов А.К. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение/ Розов А.К.— СПб.:Политехника, 2005.— 303 с.

6.1.3 Миллер Б.М. Теория случайных процессов в примерах и задачах / Миллер Б.М., Панков А.Р.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.— 318 с.— Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: <http://www.iprbookshop.ru/17472> — Режим доступа: для авторизир. пользователей.

6.1.4 Миллер Б.М. Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. Под ред. А.И. Кибзуна. М.: Физматлит, 2007. – 320 с.

6.2 Дополнительная литература

6.2.1 Чжун К.Л., АитСахлиа Ф. Элементарный курс теории вероятностей. Стохастические процессы и финансовая математика. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009 – 455 с.

6.2.2 Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика: Учебник для вузов. – 2-е изд., доп. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. Лит., 1989. – 320 с.

6.3 Методические указания, рекомендации и другие материалы к занятиям

6.3.1 Черных Н.В. Моделирование стохастических систем. Программирование в среде Scilab. Учебное пособие / Черных Н.В. - АПИ НГТУ, Арзамас: "Ассоциация ученых" г. Арзамаса, 2010. - 109 с.

7. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

7.1 Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля), включая электронные библиотечные и информационно-справочные системы

7.1.1 Электронно-библиотечная система издательства «IPRbooks». Режим доступа: www.iprbookshop.ru.

7.1.2 Электронно-библиотечная система издательства «Лань». Режим доступа: <https://e.lanbook.com>

7.2 Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства необходимого для освоения дисциплины

7.2.1 SCILAB.

8. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ РЕСУРСЫ ДЛЯ ИНВАЛИДОВ И ЛИЦ С ОВЗ

В таблице 8.1 указан перечень образовательных ресурсов, имеющих формы, адаптированные к ограничениям здоровья, а также сведения о наличии специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования.

Таблица 8.1 – Образовательные ресурсы для инвалидов и лиц с ОВЗ

Перечень образовательных ресурсов, приспособленных для использования инвалидами и лицами с ОВЗ	Сведения о наличии специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования
ЭБС «IPRbooks»	Специальное мобильное приложение IPR BOOKS WV-Reader
ЭБС «Лань»	Синтезатор речи, который воспроизводит тексты книг и меню навигации

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ, НЕОБХОДИМОЕ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Учебные аудитории для проведения занятий по дисциплине (модулю), оснащены оборудованием и техническими средствами обучения.

В таблице 9.1 перечислены:

- учебные аудитории для проведения учебных занятий, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения;
- помещения для самостоятельной работы обучающихся, которые оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду АПИ НГТУ.

Таблица 9.1 – Оснащенность аудиторий и помещений для проведения занятий и самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю)

Наименование аудиторий и помещений для проведения занятий и самостоятельной работы	Оснащенность аудиторий и помещений для проведения занятий и самостоятельной работы
210 - Учебная аудитория г. Арзамас, ул. Калинина, дом 19	Доска меловая, рабочее место преподавателя, 48 посадочных мест
212 - Учебная аудитория г. Арзамас, ул. Калинина, дом 19	Доска меловая, Стол для препод. (1 шт.), Посадочных мест - 64
218 - Учебная мультимедийная аудитория г. Арзамас, ул. Калинина, дом 19	ПК (с подключением к интернету) базе Pentium 7500/2x1024Mb/500Gb/AD52; Проектор ACER X138 WH OLP3700Lm 20000:1 - 1 шт.; Экран д/проектора - 1 шт.; Акустическая система - 1 шт.; посадочных мест - 48; рабочее место преподавателя
228 - Учебная аудитория г. Арзамас, ул. Калинина, дом 19	Доска меловая, рабочее место преподавателя, посадочных мест -82
039 - Учебная аудитория г. Арзамас, ул. Калинина, дом 19	Доска аудиторная меловая; рабочее место преподавателя; 28 посадочных мест студентов
037 - Учебная аудитория г. Арзамас, ул. Калинина, дом 19	Доска меловая, стол преподавателя, 60 посадочных мест
320 - Учебная мультимедийная аудитория г. Арзамас, ул. Калинина, дом 19	Доска магнитно-маркерная; Мультимедийный проектор BENQ; Экран; Компьютеры PC Intel® Core™ i3-10100/256SSD/8RAM - 14 шт; Посадочных мест - 34
316 - Кабинет самоподготовки студентов г. Арзамас, ул. Калинина, дом 19	рабочих мест студента – 26 шт; ПК, с выходом на телевизор LG - 1 шт. ПК с подключением к интернету -5шт.

10. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ОБУЧАЮЩИМСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

10.1 Общие методические рекомендации для студентов по освоению дисциплины, образовательные технологии

Дисциплина реализуется посредством проведения контактной работы с обучающимися (включая проведение текущего контроля успеваемости), самостоятельной работы обучающихся и промежуточной аттестации.

Контактная работа проводится в аудиторной и внеаудиторной форме, а также в электронной информационно-образовательной среде института (далее – ЭИОС). В случае проведения части контактной работы по дисциплине в ЭИОС (в соответствии с расписанием учебных занятий), трудоемкость контактной работа в ЭИОС эквивалентна аудиторной работе.

При преподавании дисциплины используются современные образовательные технологии, позволяющие повысить активность студентов при освоении материала курса и предоставить им возможность эффективно реализовать часы самостоятельной работы.

Весь лекционный материал курса, а также материалы для практических занятий находятся в свободном доступе в СДО MOODLE на странице курса по адресу: <https://sdo.api.nntu.ru/course> и могут быть проработаны студентами до чтения лекций в ходе самостоятельной работы. Это дает возможность обсудить материал со студентами во время чтения лекций, активировать их деятельность при освоении материала.

На лекциях и практических занятиях реализуются интерактивные технологии, приветствуются вопросы и обсуждения, используется лично-ориентированный подход, дискуссионные технологии, технологии работы в малых группах, что позволяет студентам проявить себя, получить навыки самостоятельного изучения материала, выровнять уровень знаний в группе.

Все вопросы, возникшие при самостоятельной работе над домашним заданием, подробно разбираются на практических занятиях и лекциях. Проводятся индивидуальные и групповые консультации с использованием, как встреч со студентами, так и современных информационных технологий, таких как форум, чат, внутренняя электронная почта СДО MOODLE.

Иницируется активность студентов, поощряется задание любых вопросов по материалу, практикуется индивидуальный ответ на вопросы студента.

Для оценки знаний, умений и уровня сформированности компетенции в процессе текущего контроля применяется система контроля и оценки успеваемости студентов, представленная в табл. 5.1. Промежуточная аттестация проводится в форме зачета с использованием системы контроля и оценки успеваемости студентов, представленной в табл. 5.2.

10.2 Методические указания для занятий лекционного типа

Лекционный курс предполагает систематизированное изложение основных вопросов тематического плана. В ходе лекционных занятий раскрываются базовые вопросы в рамках каждой темы дисциплины. Обозначаются ключевые аспекты тем, а также делаются акценты на наиболее сложных и важных положениях изучаемого материала. Материалы лекций являются основой для подготовки обучающихся к практическим занятиям и выполнения заданий самостоятельной работы, а также к мероприятиям текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

10.3. Методические указания по освоению дисциплины на лабораторных работах

Подготовку к каждой лабораторной работе студент должен начать с ознакомления с планом занятия, который отражает содержание предложенной темы. Каждая выполненная работа с оформленным отчетом и подлежит защите у преподавателя.

При оценивании лабораторных работ учитывается следующее:

- качество выполнения экспериментально-практической части работы и степень соответствия результатов работы заданным требованиям;
- качество оформления отчета по работе;
- качество устных ответов на контрольные вопросы при защите работы.

10.4 Методические указания по освоению дисциплины на занятиях практического типа

Практические (семинарские) занятия представляют собой детализацию лекционного теоретического материала, проводятся в целях закрепления курса и охватывают все основные разделы. Основной формой проведения практических занятий является обсуждение наиболее проблемных и сложных вопросов по отдельным темам, а также решение задач и разбор примеров в аудиторных условиях.

Практические (семинарские) занятия обеспечивают:

- проверку и уточнение знаний, полученных на лекциях;
- развитие умений и навыков дискуссионного обсуждения вопросов по учебному материалу дисциплины, выработки собственной позиции по актуальным вопросам (проблемам);
- подведение итогов занятий (результаты тестирования, готовность отчетов по практическим занятиям, готовность домашних заданий, выполненных в ходе самостоятельной работы).

10.5 Методические указания по самостоятельной работе студентов

Самостоятельная работа обеспечивает подготовку обучающегося к аудиторным занятиям и мероприятиям текущего контроля и промежуточной аттестации по изучаемой дисциплине. Результаты этой подготовки проявляются в активности обучающегося на занятиях и в качестве выполненных практических заданий и других форм текущего контроля.

В процессе самостоятельной работы рекомендуется проработка материалов лекций по каждой пройденной теме, а также изучение основной учебной и справочно-библиографической литературы, представленной в разделе 6.

Для выполнения самостоятельной работы при изучении дисциплины студенты могут использовать специализированные аудитории (см. табл. 9.1), оборудование которых обеспечивает доступ через «Интернет» к электронной информационно-образовательной среде института и электронной библиотечной системе, где располагаются учебные и учебно-методические материалы, которые могут быть использованы для самостоятельной работы.

10.6 Методические указания по обеспечению образовательного процесса

1. Методические рекомендации по организации аудиторной работы. Приняты Учебно-методическим советом НГТУ им. Р.Е. Алексеева, протокол № 2 от 22 апреля 2013 г. Электронный адрес: https://www.nntu.ru/frontend/web/ngtu/files/org_structura/upravleniya/umu/docs/metod_docs_ngtu/metod_rekom_auditorii.PDF.

2. Методические рекомендации по организации и планированию самостоятельной работы студентов по дисциплине. Приняты Учебно-методическим советом НГТУ им. Р.Е. Алексеева, протокол № 2 от 22 апреля 2013 г. Электронный адрес: https://www.nntu.ru/frontend/web/ngtu/files/org_structura/upravleniya/umu/docs/metod_docs_ngtu/metod_rekom_srs.PDF.

3. Учебное пособие «Проведение занятий с применением интерактивных форм и методов обучения», Ермакова Т.И., Ивашкин Е.Г., 2013 г. Электронный адрес: https://www.nntu.ru/frontend/web/ngtu/files/org_structura/upravleniya/umu/docs/metod_docs_ngtu/provedenie-zanyatij-s-primeneniem-interakt.pdf.

4. Учебное пособие «Организация аудиторной работы в образовательных организациях высшего образования», Ивашкин Е.Г., Жукова Л.П., 2014 г. Электронный адрес: https://www.nntu.ru/frontend/web/ngtu/files/org_structura/upravleniya/umu/docs/metod_docs_ngtu/organizaciya-auditornoj-raboty.pdf.

**Дополнения и изменения в рабочей программе дисциплины
на 20 ____/20 ____ уч. г.**

УТВЕРЖДАЮ:

Директор института:

_____ Глебов В.В.

« ____ » _____ 20 ____ г.

В рабочую программу вносятся следующие изменения:

- 1)
- 2)

или делается отметка о нецелесообразности внесения каких-либо изменений на данный учебный год

Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры, протокол от _____ № ____

Заведующий кафедрой _____
(подпись) (ФИО)

Утверждено УМК АПИ НГТУ, протокол от _____ № _____

Зам. директора по УР _____ Шурыгин А.Ю.
(подпись)

Согласовано:

Начальник УО _____ Мельникова О.Ю.
(подпись)

(в случае, если изменения касаются литературы):

Заведующая отделом библиотеки _____ Старостина О.Н.
(подпись)